

Misura dell'altezza del sole al solstizio d'estate

21 giugno 2013

La misura dell'altezza massima del sole il giorno del solstizio d'estate permette di calcolare numerose grandezze. In quel giorno il sole raggiunge la sua massima declinazione positiva, pari all'angolo di inclinazione dell'asse terrestre con il piano dell'eclittica, $23^{\circ}26'21''$: a causa di ciò le regioni della fascia temperata boreale (tra cui l'Italia) vengono colpite dai raggi solari con inclinazione minima rispetto al suolo. Inoltre, il dì è il più lungo dell'anno in tutto l'emisfero boreale, con la durata che varia a seconda della latitudine: la minima si ha nelle regioni prossime all'equatore, dove il giorno dura poco più di 12h (e d'inverno ne dura poco meno), la massima nelle regioni sopra al circolo polare, dove il dì non termina con il giorno e il sole raggiunge un'altezza minima positiva, in direzione nord, alla mezzanotte.

L'altezza del sole sull'orizzonte varia, chiaramente, con l'ora del giorno. Essa è massima a mezzogiorno, quando il sole, per un osservatore nell'emisfero boreale, è in direzione sud. Tuttavia, l'ora segnata dagli orologi nel periodo del solstizio d'estate è quella legale, cioè spostata avanti di un'ora. Inoltre, anche il mezzogiorno dell'"ora solare" non è il momento nel quale il sole è in direzione sud: la causa è da ascrivere all'acquisizione di un fuso orario omogeneo in località diverse (in un posto si usa l'ora di un altro posto) e, inoltre, alla geometria dell'orbita terrestre, che fa sì che alla stessa ora in due giorni diversi il sole, visto dal medesimo punto, non sia nella stessa direzione; questo significa che l'ombra che gli oggetti proiettano non ha sempre la stessa direzione alla stessa ora e nelle meridiane più elaborate, per ovviare al problema, la lettura si effettua su una curva ad otto, l'analemma, che corregge lo sfasamento introdotto.

In Italia si usa il fuso orario dell'Europa centrale, che è avanti di un'ora rispetto all'ora del meridiano fondamentale e corrisponde a quella che si ha al meridiano 15° est (grosso quella della città di Berlino). Poiché questa ora vale per tutta l'Italia, in ogni punto della penisola il mezzogiorno reale è ad un'orario differente, che può essere calcolato con la seguente formula:

$$h_{max} = 12 \text{ h}00'00'' + [4 \cdot (15^{\circ} - L^{\circ})]' + e$$

In essa, L° è la longitudine del luogo in gradi, mentre e è lo sfasamento di tipo analemmatico (equazione del tempo). Ad esempio, per la longitudine $11^{\circ}22'20''$ E (il sito dal quale si è effettuata la misura), che corrisponde a $+11,37222^{\circ}$, si avrà $h_{max} = 12 \text{ h}00'00'' + 14,51111' + e = 12 \text{ h}14'31'' + e$. L'equazione del tempo (il termine e) non ha un'espressione analitica semplice, dipende dal giorno dell'anno considerato e introduce una differenza massima di $20'$. Il giorno 21 giugno, $e \approx 2'$, quindi, considerando anche l'ora legale, il sole culmina alle ore

$$h_{max} \approx 13 \text{ h}16'$$

A quest'ora le ombre puntano a nord e, misurando la lunghezza dell'ombra di un oggetto di altezza nota, si può risalire all'angolo di inclinazione con cui i raggi del sole incidono al suolo, cioè all'altezza del sole.

Per la determinazione dell'altezza massima del sole si è scelto di non considerare l'ora del culmine come un parametro dato, ma di determinare anch'essa con la misura: per far ciò è necessario introdurre un metodo per determinare quando il sole culmina, cioè quando le ombre puntano il nord.

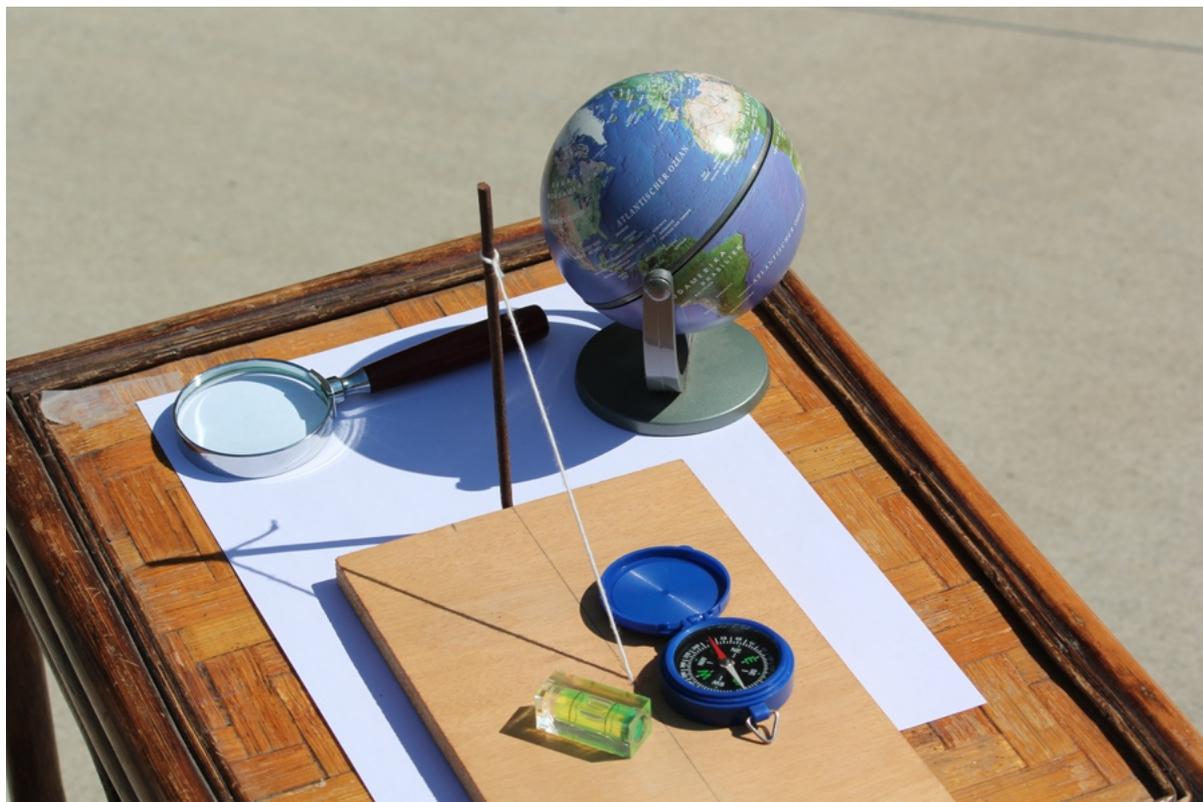
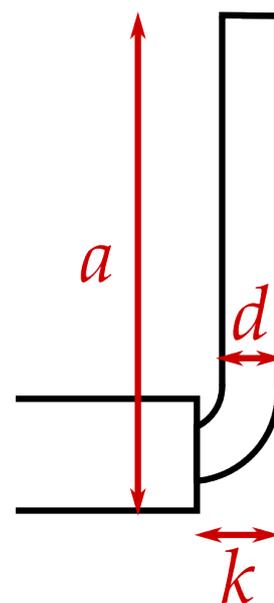


Figura 1: Gli strumenti utilizzati per la misura: tavoletta con gnomone, bussola, bolla, lente d'ingrandimento e un piccolo mappamondo.

Si è utilizzata la tavoletta con la piccola asta di ferro mostrata in figura. Sulla tavoletta e sull'asticciola è fissata una piccola corda, in maniera che sia pendente di circa 45° ; la sua ombra è sufficientemente sottile da essere confrontabile con la linea che marca l'asse della tavoletta, per individuare il momento nel quale il sole ha la direzione dell'asse della tavoletta. La stanghetta getta sul foglio di carta retrostante un'ombra, che si è misurata per stimare l'altezza. Si è controllata l'orizzontalità della tavoletta con la bolla, girandola in più direzioni.

Cruciale per la misura è stato l'allineamento dell'asse della tavoletta con il nord geografico: questo passo è stato effettuato grazie ad una bussola con goniometro e ad una lente d'ingrandimento per poter vedere meglio quest'ultimo. La direzione indicata dall'ago della bussola è il nord magnetico, non quello geografico. Il valore della declinazione magnetica, l'angolo tra il nord e la direzione dell'ago della bussola, è stato ricavato dal sito internet dell'istituto nazionale statunitense di geofisica: per il luogo dell'osservazione e nell'anno 2013 vale $\delta \simeq +2,5^\circ$, cioè la bussola punta $2,5^\circ$ più ad est del nord geografico. Si è cercato, quindi, di far coincidere l'asse della basetta in legno con la direzione trovata in questo modo.

Per eseguire la misura, ci si è serviti anche di una riga, la cui tacca dei 30 cm è stata posta in corrispondenza del termine della basetta, e di una squadra, posta perpendicolarmente alla riga, in modo da poter identificare con più facilità la lunghezza dell'ombra. Si è poi usato un calibro ventesimale per misurare l'altezza dell'asticciola dalla base della tavoletta (a), il diametro dell'asta (d), la separazione tra lo spigolo della tavoletta e l'analogo punto dell'asta (k).



L'altezza del sole verrà data, quindi, dalla formula:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{a}{u - k + d/2}\right)$$

Grazie alla cordicella tesa tra l'asta e la basetta, si è stimato il momento del culmine attorno alle ore 13.19', con una incertezza dell'ordine del minuto (dovuta allo spessore dello spago): la differenza rispetto al momento reale di soli 3'. La lunghezza dell'ombra è stata misurata due volte, trovando due valori molto simili: 6,50 cm e 6,45 cm. Si è quindi assunta come lunghezza dell'ombra la media delle due, $u = 6,475$ cm. La tabellina seguente include i dati misurati:

a	15,22 cm
k	0,52 cm
d	0,41 cm
u	6,475 cm

Tabella 1: Lunghezze misurate

Per il metodo di misura utilizzato, si è considerata un'incertezza di un millimetro sulle grandezze a, k, u ; la misura di d ha l'errore statistico corrispondente all'errore massimo del calibro ventesimale ($1/20$ mm), cioè circa $14 \mu\text{m}$. Alla fine dei conti, risulta:

$$\alpha = 67^{\circ}57'55'' \pm 28'48''$$

L'altezza teorica si calcola, una volta nota la latitudine del posto, come il complementare della differenza tra la latitudine e l'inclinazione terrestre (per il solstizio d'inverno, sarebbe il complementare della somma delle due).

$$\alpha_{astro} = 90^{\circ} + 23^{\circ}26'21'' - 45^{\circ}47'27'' = 67^{\circ}38'54''$$

Considerando la 'rusticità' dei mezzi, la misura è accuratissima, si sbaglia di $19'01''$! Alternativamente, si può provare a stimare dall'altezza del sole la latitudine del posto, ottenendo, in questo caso:

$$\lambda = 45^{\circ}28'26'' \pm 28'48''$$

L'incertezza è attorno ai 53 km, mentre il vero spostamento di soli 35 km! Se si fosse disposto solo di un orologio sincronizzato con l'orario del tempo universale, l'orario del culmine stimato sarebbe stato $h.11.19' \pm 1'$, che ci avrebbe fornito una stima della longitudine di:

$$L = 10^{\circ}15' \pm 15'$$

Il calcolo della longitudine fornisce un risultato che è sbagliato per circa un grado, corrispondente a 125 km. Questa deviazione nella misura della longitudine è dovuta probabilmente alla difficoltà di allineare l'asse della tavoletta con il meridiano locale. Questo ci fornisce una misura di quanto la basetta fosse inclinata rispetto alla direzione nord-sud, circa $1^{\circ}7'20''$.

Complessivamente, grazie all'osservazione del sole al mezzogiorno del solstizio d'estate con una semplice tavoletta di legno e un'asticciola di ferro si è stimata l'altezza del sole entro i 20' e la posizione sulla terra del sito osservativo con un'accuratezza dell'ordine del centinaio di km, più che sufficienti per capire in quale regione geografica si trova il luogo dell'osservazione!

IL MAPPAMONDO LIBERATO

Si è visto nella prima figura che si è adoperato anche un piccolo mappamondo durante l'osservazione. Questo è un 'mappamondo liberato', cioè svincolato da un'asse di rotazione fisso (in questo caso è posto su una forcella che gli permette di ruotare liberamente).



Figura 2: L'osservatorio astro-elio-gnomo-goniometrico poco prima del mezzogiorno. Il piccolo mappamondo, come la bolla e quasi tutti i miei giochi scientifici, proviene dal Deutsches Museum di Monaco.

Questa geniale configurazione permette di utilizzare il mappamondo come un osservatorio sulle condizioni di illuminazione della Terra: basta porre verso l'alto la regione del mondo in cui ci si trova e, da questa posizione, orientare la direzione sud del mappamondo verso il sud geografico. Così facendo si ha per le mani una versione sì ridotta del mondo, ma equiorientata! Infatti il piedistallo del mappamondo appoggia sulla regione che, su di esso, è stata posta in alto, cioè con lo stesso versore normale uscente. La semisfera illuminata dal sole sul mappamondo mostra in quali terre è giorno e in quali è notte!

Il giorno del solstizio d'estate, a mezzogiorno, il sole illumina in maniera uguale le terre ad ovest ed a est del punto in cui ci si trova e, inoltre, le regioni sopra al circolo polare artico sono sempre illuminate. Tale situazione è visibile nelle fotografie successive, assieme ad altre prospettive del mappamondo liberato.



Figura 3: Al mezzogiorno vero del giorno del solstizio d'estate, il sole illumina simmetricamente le regioni ad est e a ovest del luogo dove si osserva. Il circolo polare artico e le regioni più settentrionali sono completamente illuminate.

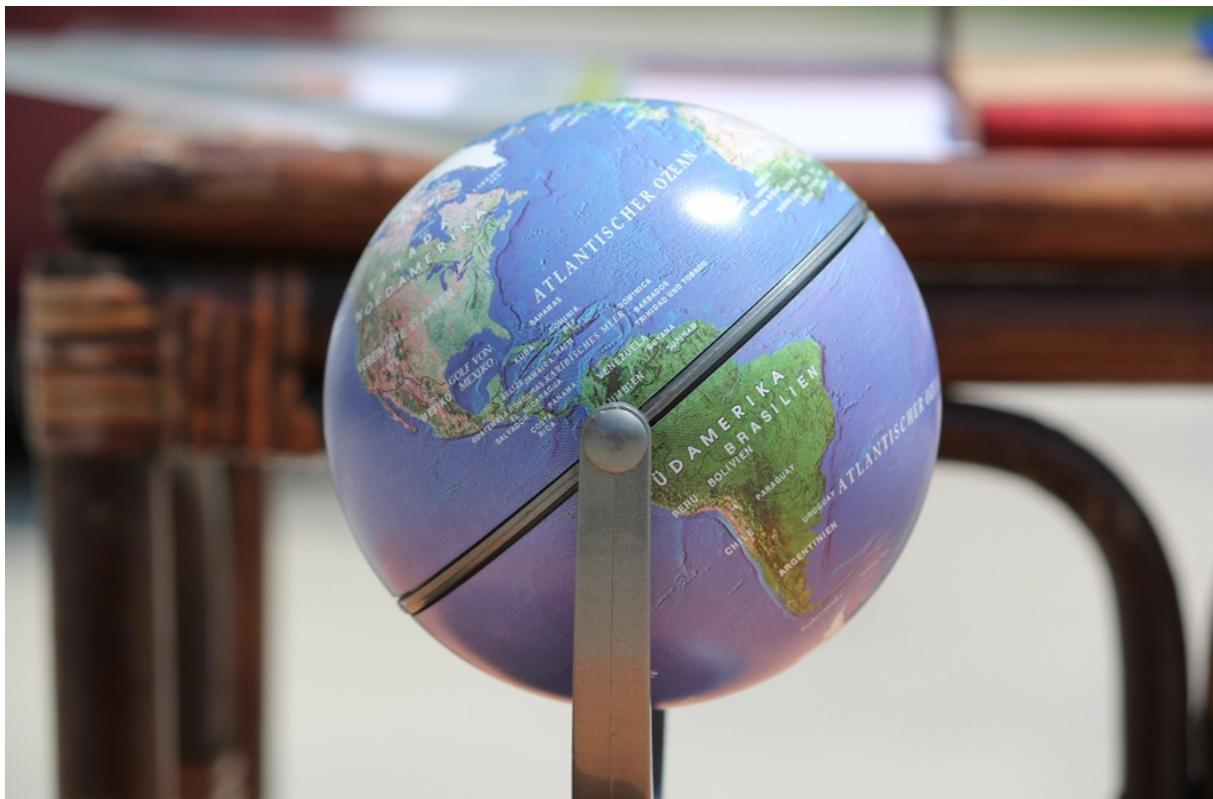


Figura 4: Contemporaneamente, il sole lambisce le coste del continente americano. L'antartide e le regioni più australi del pianeta sono in ombra.



Figura 5: Sette ore dopo, poco prima che il sole tramontasse, la linea di separazione tra il giorno e la notte si è spostata e sta per raggiungere l'Italia, mentre regioni di medesima longitudine ma nell'emisfero australe sono già in ombra. Tra sei mesi la situazione sarà simmetrica, con l'angolo di inclinazione del terminatore rovesciato. Si vede bene che le regioni boreali sono ancora (e resteranno) illuminate, come a mezzodi.



Figura 6: Il sole è riuscito a toccare la parte sommitale piana del monte e poi è tramontato alle h.20.20'.56"; era sorto alle h.6.42'25". Il solstizio è avvenuto alle h.7.04' circa.