

Il tombino relativistico

Giovanni Ceribella

12 maggio 2016

Un'asta lunga L scivola senza attrito su una lamina, che si può pensare come un piano infinitamente sottile. La lamina è perforata e il foro è lungo esattamente L .

Per un osservatore solidale con il piano, la barra è lunga meno di L , in ragione di $1/\gamma$, a causa della contrazione relativistica delle lunghezze. L'osservatore solidale con la lamina conclude che prima o poi, essendo più corta del buco, l'asta ci cadrà dentro.

Viceversa, in un sistema di riferimento solidale con l'asta, questa misurerà L e sarà il foro ad essere contratto fino a L/γ . Ma allora la barra non può cascarci dentro, se è più lunga! Chi ha ragione?

Il paradosso sorge dall'assunzione implicita (ed erronea) che la rigidità dell'asta sia un dato assoluto, valido in qualunque sistema di riferimento. La condizione di rigidità di un corpo si può formulare richiedendo che le distanze relative tra i vari punti che lo compongono siano fissate, ovvero che le velocità relative siano nulle. Questa richiesta è conservata dalla legge della composizione delle velocità galileiane, che è una trasformazione affine del tipo:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

Infatti, detta $\delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ la velocità relativa tra due punti, si ha:

$$\begin{aligned}\delta\vec{v}' &= \vec{v}_2' - \vec{v}_1' \\ &= \vec{v}_2 - \vec{u} - \vec{v}_1 + \vec{u} \\ &= \delta\vec{v}\end{aligned}$$

In relatività ristretta, la legge di composizione delle velocità segue dalle trasformazioni di Lorentz. Calcoliamole per due sistemi di riferimento S ed S' in moto l'uno rispetto all'altro con velocità u lungo l'asse x :

$$\begin{aligned}ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z\end{aligned}$$

$$\begin{cases} c dt' = \gamma(c dt - \beta dx) \\ dx' = \gamma(dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad \begin{cases} c dt = \gamma(c dt' + \beta dx') \\ dx = \gamma(dx' + \beta c dt') \\ dy = dy' \\ dz = dz' \end{cases}$$

In queste equazioni β e γ sono sempre riferiti alla velocità u che lega i due sistemi. Dai differenziali è possibile trovare le leggi di composizione delle velocità:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \beta c dt)}{\gamma(dt - \beta/c dx)} \\ &= \frac{(dx/dt) - \beta c (dt/dt)}{1 - \beta/c v_x} \\ &= \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \beta/c dx)} \\ &= \frac{dy/dt}{\gamma(1 - \beta/c v_x)} \\ &= \frac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - \beta/c dx)} \\ &= \frac{dz/dt}{\gamma(1 - \beta/c v_x)} \\ &= \frac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)} \end{aligned}$$

Osservando le relazioni, appare chiaro che $\delta\vec{v}' \neq \delta\vec{v}$, cioè che le velocità relative non sono conservate. Questo implica che il vincolo di rigidità è valido solo per il sistema di riferimento nel quale è formulato e non per gli altri.

Supponiamo per semplicità che la sbarra inizi a cadere nel buco, per l'osservatore solidale con la lamina, solo quando essa non è più in contatto con il piano d'appoggio. Questa semplificazione, che serve ad evitare che l'asta inizi a ruotare, si può realizzare pensando che il buco sia chiuso da un coperchio, che cede e casca assieme alla sbarra non appena tutto il peso di questa vi grava sopra (una specie di tombino malefico).

In tale sistema di riferimento, che chiamiamo S , la barra cadrà rigidamente a partire dall'istante t_0 nel quale la sua estremità posteriore lascia la lamina che la sostiene¹. Poniamo l'origine degli assi in tale punto, e scegliamo il sistema S' solidale con l'asta in modo che la sua origine coincida con quella di S per tale evento. Siano (ct, x, y, z) le coordinate di S e (ct', x', y', z') quelle di S' . L'equazione del moto di un punto sulla base della barra, nel sistema S , si può scrivere con:

$$\begin{aligned} x(t) &= ut + \lambda \\ z(t) &= \begin{cases} 0 & \text{se } ct \leq 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 & \text{se } ct > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ove $0 \leq \lambda \leq \frac{L}{\gamma}$ è la posizione del punto rispetto all'estremità posteriore. L'equazione per la coordinata z cambia forma se trasportata, tramite le trasformazioni di Lorentz, alle corrispettive variabili in S' :

$$z'(t') = \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma(ct' + \beta x') \leq 0 \\ -\frac{1}{2}g\gamma^2(t' + \frac{u}{c^2}x')^2 & \text{se } \gamma(ct' + \beta x') > 0 \end{cases}$$

La coordinata z' non dipende più solo dal tempo, ma anche dalla coordinata x' ! Questa asserzione viola palesemente il vincolo di rigidità, come ci si poteva aspettare dal discorso fatto in precedenza.

¹Si veda dopo per la giustificazione di questa assunzione.

La relazione può essere riscritta come:

$$z'(t') = \begin{cases} 0 & \text{se } x' \leq -\frac{ct'}{\beta} \\ -\frac{1}{2}g \frac{\gamma^2 - 1}{c^2} \left(\frac{ct'}{\beta} + x'\right)^2 & \text{se } x' > -\frac{ct'}{\beta} \end{cases}$$

L'estremità anteriore dell'asta, nel sistema S' , ha coordinata fissata $x' = L$. Tale punto è il primo a soddisfare la relazione $x' = -ct'/\beta$ nell'istante $t'_L = -\beta L/c$, ed è quindi il primo che inizia a cadere, quando si trova già a una distanza di L/γ^2 oltre l'orlo del foro. Ad istanti di tempo successivi, tutti i punti della sbarra iniziano a cadere, sempre più precocemente rispetto al moto del buco, mentre la parte posteriore di essa è ancora poggiata sulla lamina. Infine (a $t' = 0$), anche quest'ultima, trovandosi sul bordo del foro a $x' = 0$, lascia la lamina e casca. Globalmente, l'asta resta sospesa "rigidamente" per un tratto L/γ^2 sopra al foro, per poi incominciare a deflettersi a t'_L e attraversarlo fino a $t' = 0$, quando si trova ormai in caduta libera, sotto la lamina.

Per visualizzare la situazione è stato scritto uno script in Python, che produce un'animazione della caduta della sbarra nel sistema di riferimento S' . Seguono alcuni fermi immagine del fenomeno per $\gamma = 2$. Ad alto γ la deformazione dell'asta, più che una deflessione, assomiglia al flusso di un fluido viscoso, come una colata di metallo fuso.

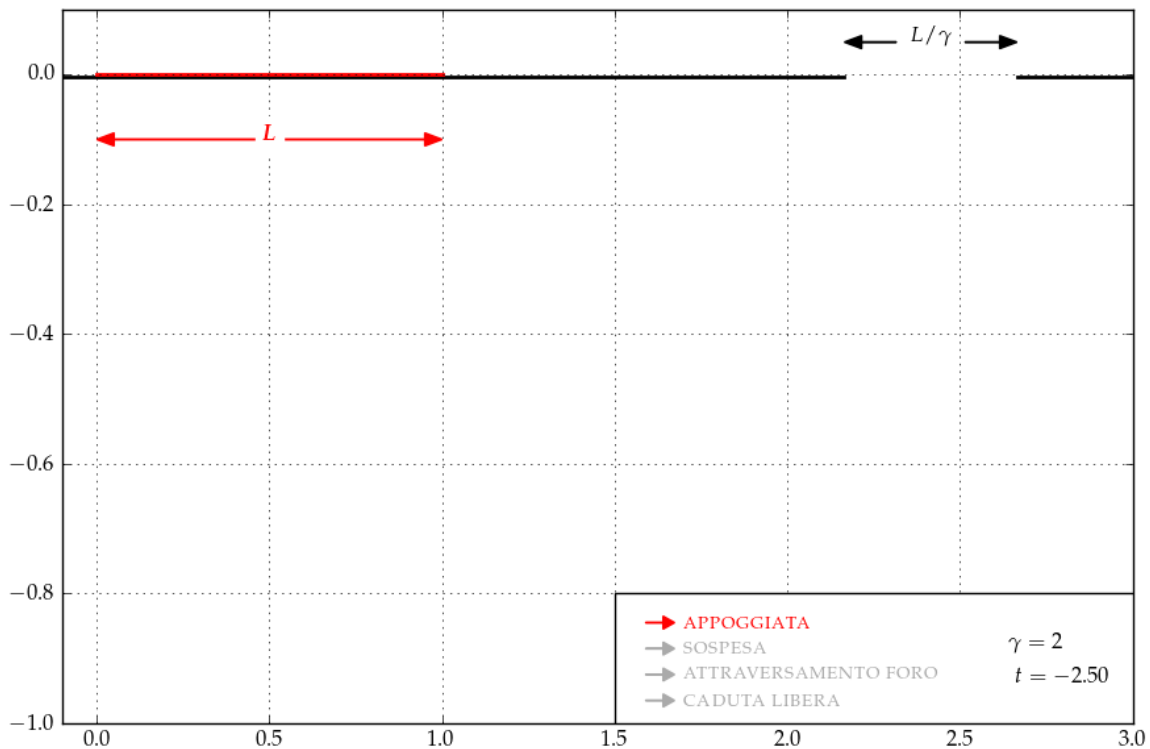


Figura 1: Situazione iniziale. L'asta è a riposo nel suo sistema di riferimento S' , appoggiata sulla lamina. Il buco si sposta verso sinistra a una velocità u . ($t' \leq -L/u$)

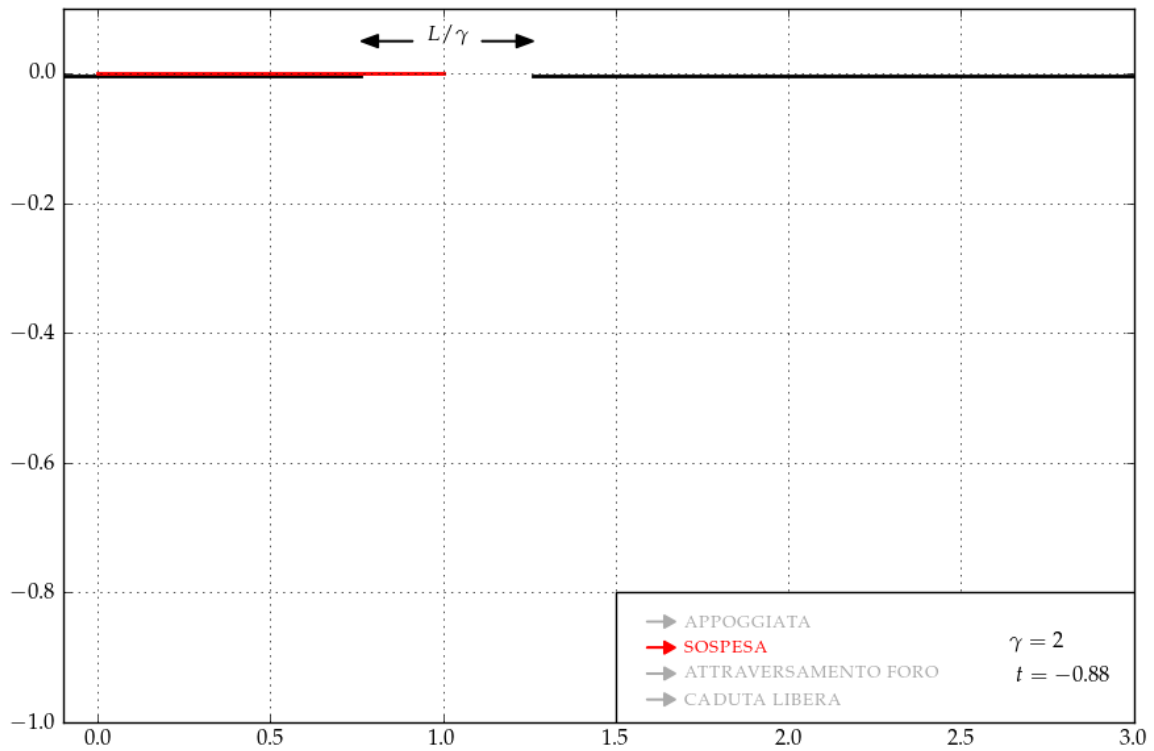


Figura 2: Situazione pre-accelerata. Il foro ha raggiunto l'asta ed essa ha un'estremità libera sospesa nel vuoto. Lo stato iniziale di moto dell'asta non è ancora stato perturbato. ($-L/u \leq t' \leq -\beta L/c$)

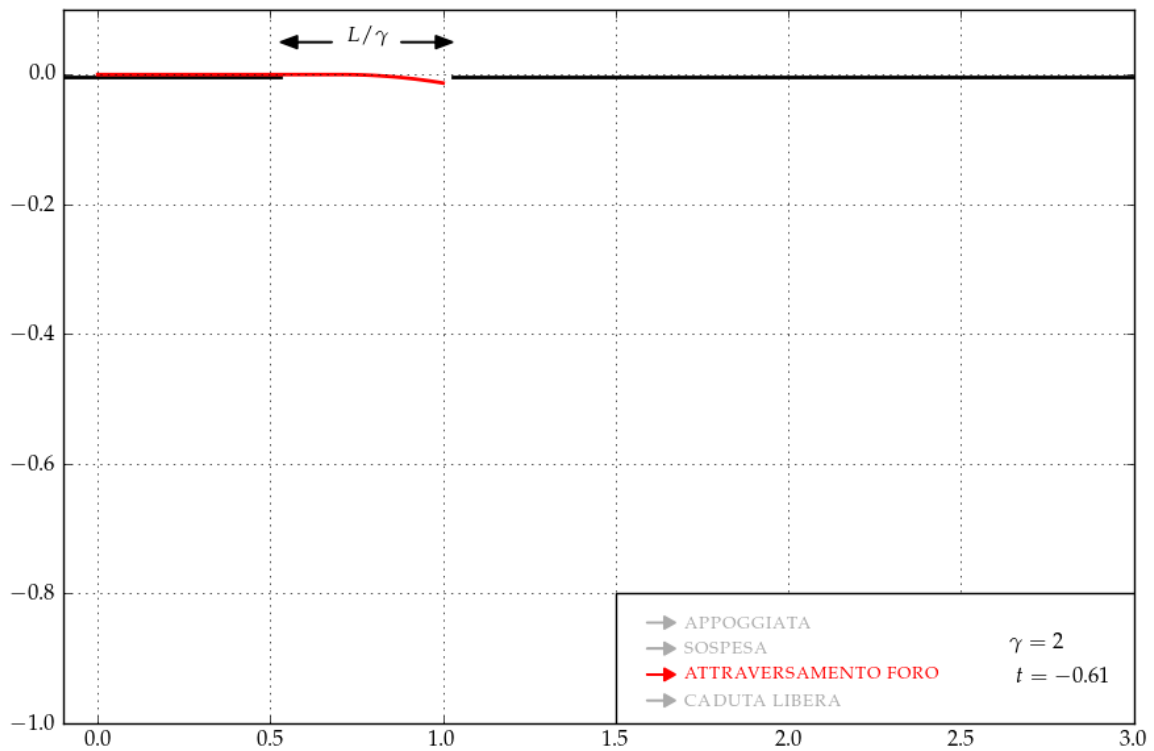


Figura 3: Deflessione. Il campo di accelerazione uniforme inizia ad agire sulla parte frontale dell'asta, che si deflette. Il sistema di riferimento S' non è più quello proprio dell'asta ed essa acquista un momento anche in esso, mentre attraversa il foro. ($-\beta L/c \leq t' \leq 0$)

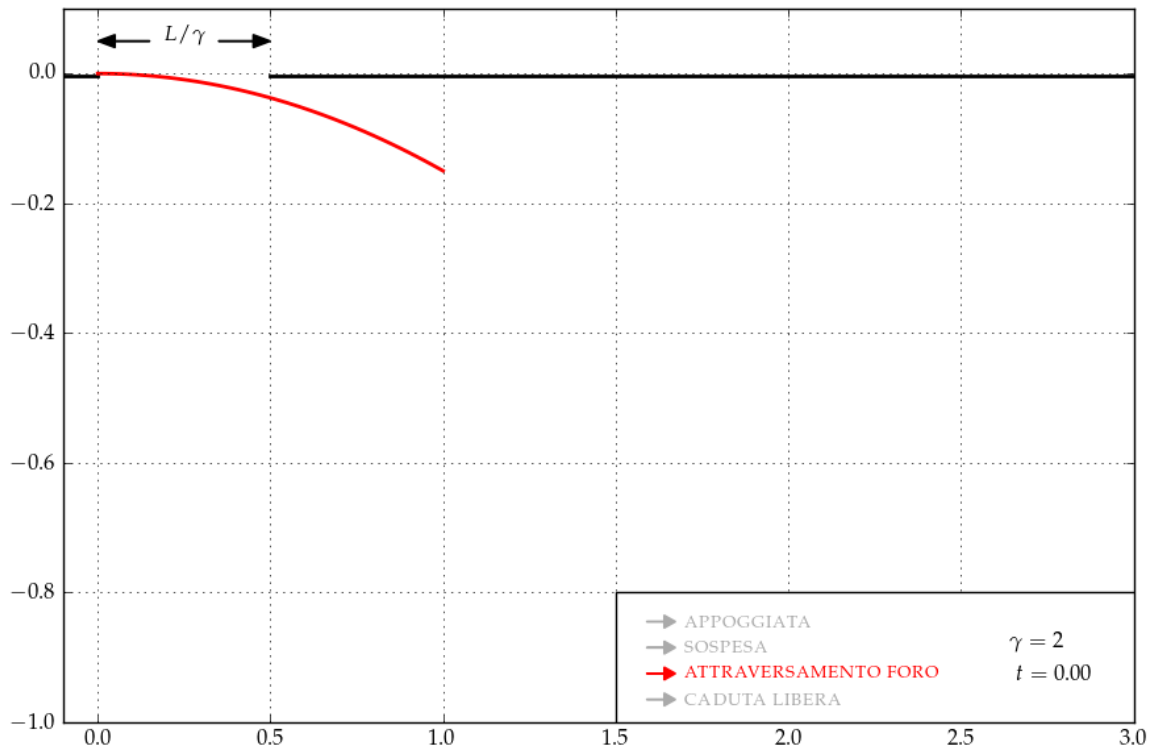


Figura 4: Ultimo contatto. Il foro raggiunge l'estremità posteriore dell'asta e anch'essa comincia a cadere, accelerando. Si tratta dell'istante corrispondente al quale, nel sistema S , l'asta inizia la sua caduta. ($t' = 0$)

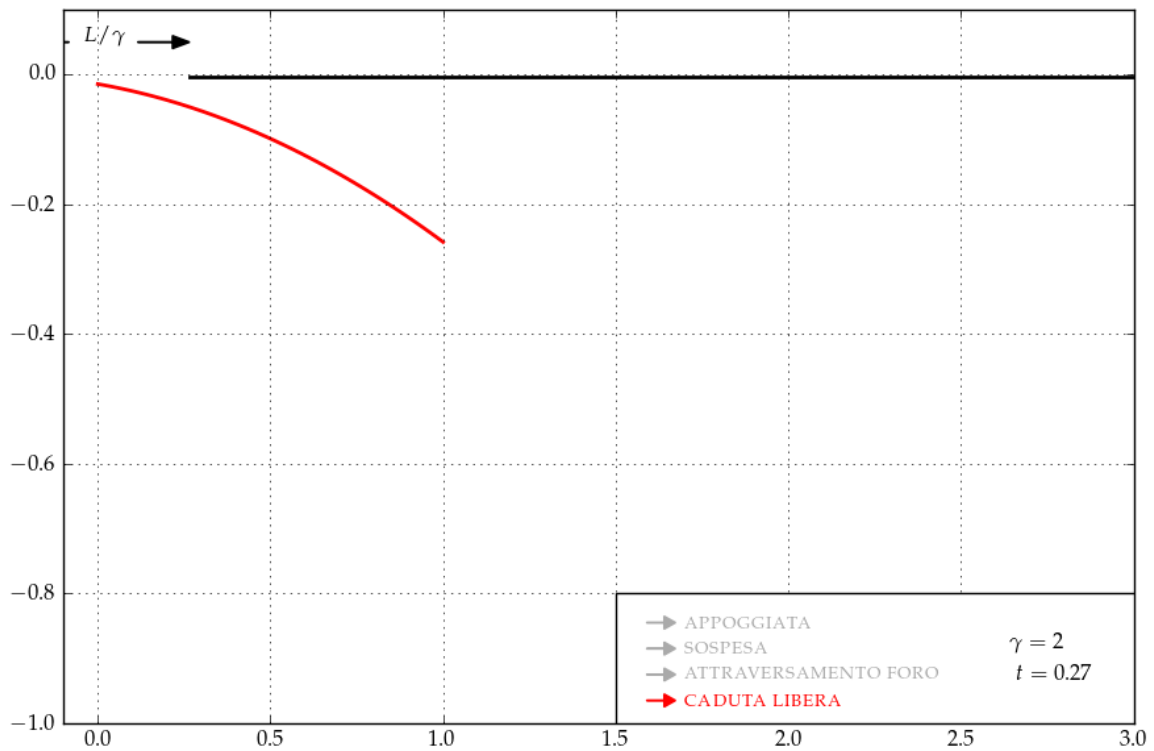


Figura 5: Caduta libera. L'asta ha attraversato il buco, che si allontana nella regione $x' \leq 0$, e continua a cadere verso il basso. ($t' \geq 0$)

Domande e risposte

Hai usato la relatività speciale con un campo gravitazionale! Non si può!

Falso. Ho introdotto un campo di accelerazione uniforme $\vec{a} = -g\vec{k}$ che può rappresentare allo stesso modo il campo gravitazionale in approssimazione debole e locale, un campo magnetico debole, una spinta dovuta a un propulsore, eccetera.

Hai usato la relatività speciale con le accelerazioni! Sei per caso ammattito??

No, non lo sono. Benché sia poco noto, la teoria della relatività speciale può trattare senza difficoltà i casi di moto accelerato uniforme come questo. Basta definire un sistema istantaneamente inerziale che segue il moto del corpo. Le equazioni del moto che se ne derivano, per un osservatore a riposo, tendono al classico moto parabolico per basse velocità, mentre ad alte velocità includono le funzioni iperboliche che rendono conto dell'asintoticità alla velocità della luce c . La stessa definizione di "moto uniformemente accelerato" dev'essere ritoccata in relatività speciale: non si può più assumere $\ddot{x} = k$ perché altrimenti si supererebbe prima o poi c . "Accelerazione costante" significa in questo caso che un tizio su un razzo che accelera misura con un dinamometro una forza d'inerzia costante.

Hai tenuto conto del cambiamento indotto dall'accelerazione sul parametro γ dell'asta?

No, si suppone che l'accelerazione sia molto piccola. Nelle animazioni e nelle figure precedenti l'effetto di deflessione è stato fortemente esagerato.

Se un corpo lungo L può passare agilmente per un buco lungo L ... non è che per caso ci può passare anche un corpo più lungo di L ?

Sì! Con un piccolo conto, confrontando l'equazione del moto del buco in S' con la condizione $ct' + \beta x' = 0$, si trova che la lunghezza massima che un corpo deve avere per poter passare nel modo descritto per un buco di lunghezza a riposo L è γL , come ci si aspetta anche dalla fenomenologia in S .

Perché la barra è rigida in S e non in S' ? Non sarebbe più naturale che il vincolo di rigidità fosse posto nel sistema proprio della barra, dove hanno luogo le interazioni che mantengono la rigidità strutturale? Che senso ha che l'asta cada *nel suo riferimento proprio*?

S' non è il riferimento proprio dell'asta, o almeno non lo è più dall'istante in cui essa inizia ad accelerare, deflettendosi. S' è un riferimento solidale con il moto uniforme della barra prima che inizi a cadere: si dovrebbe definire un sistema istantaneamente inerziale per descrivere il moto dal punto di vista di un osservatore seduto sulla barra in caduta libera (usando un tensore metrico non Minkovskiano corrispondente a delle coordinate dette di Rindler). Quindi il sistema S' non è quello "naturale" nel quale porre una condizione di rigidità. Essa viene posta in S , e se ne deriva la fenomenologia qui descritta, perché per assunzione abbiamo posto che tutti i punti dell'asta inizino ad accelerare in S nello stesso istante, "rigidamente": se così non fosse, cioè se non ci fosse il "tombino malefico" ad aprirsi al momento giusto, la descrizione del fenomeno, tanto in S quanto in S' , sarebbe differente.

Bibliografia

W. Rindler, "Length Contraction Paradox", 29 Jan 1961.