INVERSIONE DI SERIE DI POTENZE

Giovanni Ceribella

21 dicembre 2015

Introduzione

Questo documento riassume un metodo per trovare l'inversa di una funzione definita da una serie di potenze, valido sotto alcune ipotesi sulla serie medesima. In altre parole, data:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} f_j x^j$$

Si vuole trovare una $g(x)$, definita anch'essa come serie di potenze, per la quale valga:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i x^i$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i \left(\sum_{j=1}^{+\infty} f_j x^j \right)^i = x$$

La determinazione dei coefficienti g_i a partire dagli f_j è lo scopo di questo testo.

Composizione di serie

In generale si può definire la composizione h di due funzioni f e g come:

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

Nel caso in cui le funzioni f e g siano definite da serie di potenze, anche la h potrà essere scritta in tale modo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i \left(\sum_{j=1}^{+\infty} f_j x^j \right)^i = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i \left(f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots \right)^i$$

Le somme sono state ristrette ai termini di grado maggiore di zero per una ragione che sarà chiara a breve. Notiamo come l'identificazione tra i termini dello stesso grado in x ai due membri dia un sistema (infinito) di equazioni lineari tra le h_n e le g_i. Per trovare l'espressione della generica h_n, è necessario estrarre dalla doppia sommatoria infinitia tutti i termini di grado n in x. Il problema coinvolge l'espansione delle potenze della serie f, in modo simile a quanto accade con i prodotti notevoli come il quadrato di binomio o il cubo di trinomio.

È evidente che nessun termine di h di grado n potrà essere generato da addendi delle somme in i o j con grado maggiore di n. Infatti il termine $f_{n+1} x^{n+1}$, anche se elevato alla minima potenza con $i = 1$, avrà comunque grado maggiore di n; allo stesso modo, la potenza $(n + 1)$-esima della serie

f, $(f_1x + f_2x^2 + \dots)^{n+1}$, non conterrà nessun termine di grado n, poiché persino il termine lineare f_1x sarà elevato alla $n + 1$. Se si vuol capire com'è composto il termine di grado 4 di h, si dovranno considerare soltanto i termini di f di grado alpiù 4 e quelli di g risultanti dagli elevamenti a potenza di f fino alla quarta potenza:

$$\begin{aligned} &g_1(f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4)^1+ \\ &g_2(f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4)^2+ \\ &g_3(f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4)^3+ \\ &g_4(f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4)^4 \end{aligned}$$

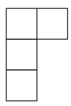
Chiaramente, tra questi ci sono anche termini di grado superiore, come $g_4f_4^4x^{16}$. È necessario pertanto considerare le partizioni intere di n per determinare quali tipi di termini parziali compongano il termine di grado n di h.

Diagrammi di Young per i termini parziali (neri)

Le partizioni intere sono identificate dai diagrammi di Young. Si possono mettere in relazione i termini di grado n generati dalla doppia sommatoria con i diagrammi di Young nel modo seguente:

Identificazione 1 (Nero) *Si identifica un termine di h di grado n con un diagramma di Young con n celle. Le righe del diagramma rappresentano i termini di f coinvolti come fattori nella generazione del termine e il numero di celle in una riga è il grado del termine di f corrispondente. Il numero di righe equivale all'esponente al quale è stata elevata f per generare il termine.*

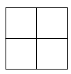
Esempio 1:



$\rightarrow\ g_3\ (f_2x^2) \cdot (f_1x) \cdot (f_1x)$

La prima riga (composta da 2 celle) dà f_2x^2, il termine di secondo grado di f; la seconda riga corrisponde a f_1x; la terza riga, come la precedente, fornisce il fattore f_1x. Il termine risultante $f_1^2f_2x^4$ è di grado quattro, come le celle del diagramma. Il numero di righe è 3, così come l'esponente al quale è stata elevata f per ottenere questo termine, e tale è l'indice del coefficiente di g.

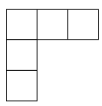
Esempio 2:



$\rightarrow\ g_2\ (f_2x^2) \cdot (f_2x^2)$

Il diagramma ha 4 celle e quindi rappresenta un termine di quarto grado. La prima riga ha due celle e quindi rappresenta il termine di secondo grado di f. La seconda riga ha pure due celle e rappresenta lo stesso termine. Ci sono solo due righe: il termine proviene dal quadrato della serie f originaria.

Esempio 3:



$\rightarrow\ g_3\ (f_3x^3) \cdot (f_1x) \cdot (f_1x)$

Il diagramma ha 5 celle e rappresenta un termine di quinto grado. La prima riga ha tre celle e quindi rappresenta il termine cubico di f. Le altre due righe hanno una sola cella e contribuiscono ciascuna con un prodotto per il termine lineare di f. Ci sono tre righe: il termine risultante è generato dal cubo di f.

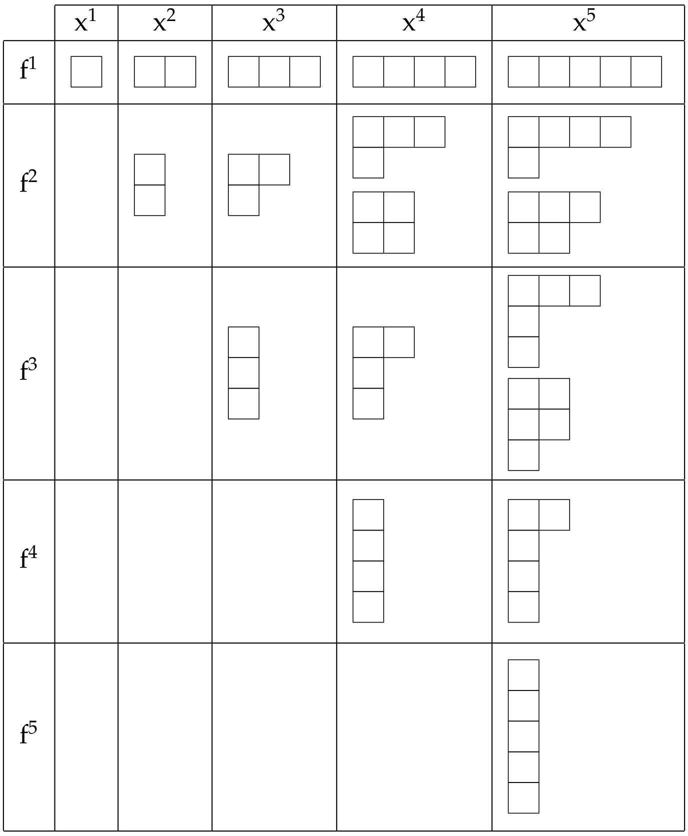
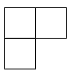


Tabella 1: Diagrammi di Young associati ai termini parziali. Procedendo da sinistra a destra aumenta il grado del termine risultante (numero di celle). Procedendo dall'alto verso il basso aumenta la potenza alla quale viene elevata f (numero di righe).

Il termine di grado n di h potrà essere scritto come somma di tutti i termini parziali di grado n che si sviluppano nella doppia sommatoria, ciascuno dei quali è rappresentato da un diagramma di Young con n celle. La Tabella 1 mostra i possibili temini parziali per i termini di h di grado basso. Si potrebbe pensare, a questo punto, che il termine totale sia la somma dei termini parziali così trovati. Ciò è vero nei casi particolari $n = 1$ e $n = 2$, però non è già più così a partire dai termini di terzo grado. Si consideri ad esempio il termine corrispondente a $g_2 f_1 f_2 x^3$:



Questo termine proviene dall'elevamento al quadrato di f, ed è composto da due termini puri di grado differente: $f_1 x$ e $f_2 x^2$. L'elevamento al quadrato può mescolare i termini di grado diverso solo attraverso i doppi prodotti:

$$(a + b + c + d + \dots)^2 = a^2 + b^2 + \dots + 2ab + 2ac + 2ad + \dots$$

Per capire come sommare correttamente i termini corrispondenti ai diagrammi di Young, cioè per conoscere il coefficiente da attribuire a ciascuno di essi, è pertanto necessario caratterizzare i coefficienti che emergono nelle espansioni delle potenze intere dei polinomi e trovare un modo per ricondurre ciascun termine parziale al "tipo di prodotto" che l'ha generato.

Diagrammi di Young per i coefficienti (blu)

Si trascuri in questa sezione la struttura di serie di $f(x)$, e la si tratti come un polinomio costituito da infiniti monomi:

$$(a + b + c + d + e + f + g + h + \dots)^n$$

Nell'espansione di tale oggetto, tutti i monomi risultanti hanno grado pari a n e sono costituiti da n simboli (a, b, c, $\dots$) eventualmente ripetuti. Tutti i tipi di mescolamenti possibili tra gli n simboli di un termine avvengono per la prima volta nel caso in cui il polinomio $a + b + c + \dots$ sia composto esattamente da n simboli. Per esempio il cubo di binomio conterrà solo termini con alpiù due simboli, perché in un binomio ce ne sono solo due, sebbene un termine cubico possa essere formato anche dal prodotto di tre simboli diversi:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \\ (a + b + c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^3 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc\end{aligned}$$

Aumentando ulteriormente il numero di simboli non vengono aggiunti nuovi tipi di termini, bensì si generano diversi mescolamenti dei simboli. Pertanto, per determinare tutti i tipi di termini della potenza n-esima è sufficiente studiare un polinomio del tipo $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^n$, ove il termine generico dell'espansione è sottoposto al solo vincolo di avere grado n.

Si è giunti nuovamnte al problema del partizionamento di un intero. Tuttavia, diversamente dal paragrafo precedente, non si stanno studiando i gradi risultanti dall'elevamento a potenza di una serie (polinomio con termini di grado crescente) ma soltanto le possibili forme dei termini dell'espansione di un n -omio alla n. Per distinguere le due interpretazioni dei diagrammi di Young, quelli di questa sezione saranno disegnati in blu.

Identificazione 2 (Blu) *Un termine risultante dall'elevamento a potenza n-esima di un n-omio può essere messo in relazione con un diagramma di Young con n celle: il numero di righe r identifica i diversi monomi (simboli) coinvolti nel termine; mentre il numero di celle per riga c_i indica quante volte quel simbolo è ripetuto. Il coefficiente del termine risultante è dato dalle permutazioni con ripetizione su n posizioni di r oggetti, ciascuno ripetuto c_1, c_2, $\dots$, c_r volte, ovvero:*

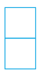
$$N = \frac{n!}{c_1!c_2!\dots c_r!}$$

Esempio 1:

 $$\rightarrow \frac{2!}{2!}\, a \cdot a = 1\, a^2$$

Il diagramma ha $n = 2$ celle, è relativo alla seconda potenza. Ha una sola riga ($r = 1$), il termine risultante è composto da un solo simbolo. La riga ha $c_1 = 2$ celle: il simbolo è ripetuto due volte. Il coefficiente risultante è $N = 2!/2! = 1$: il termine indica il quadrato di un monomio.

Esempio 2:

 $$\rightarrow \frac{2!}{1!1!}\, a \cdot b = 2\, ab$$

Il diagramma ha $n = 2$ celle, è relativo al quadrato. Ha $r = 2$ righe, il termine risultante è composto da due simboli. Sia la prima che la seconda riga hanno una sola cella ($c_1 = c_2 = 1$), non vi sono ripetizioni di simboli. Il coefficiente è $N = 2!/(1!1!)$: è il doppio prodotto di due monomi.

Esempio 3:

$$\ydiagram{2,1} \rightarrow \frac{3!}{2!1!}\, a \cdot a \cdot b = 3\, a^2 b$$

Il diagramma ha $n = 3$ celle, è quindi relativo alla potenza cubica. Ha $r = 2$ righe e quindi il termine risultante è composto da due simboli. La prima riga ha $c_1 = 2$ celle: il simbolo corrispondente è ripetuto due volte; la seconda riga ha una sola cella ($c_2 = 1$): il simbolo corrispondente compare solo una volta. Il coefficiente è $3!/(2!1!)$: il termine indica il triplo prodotto del quadrato di un simbolo per un altro.

La regola per la determinazione dei coefficienti come permutazioni con ripetizione può essere facilmente intuita considerando i diversi modi attraverso i quali è possibile formare lo stesso termine (stesso tipo e simboli identici) nell'espansione della potenza. Per calcolare velocemente il coefficiente associato ad un diagramma di Young blu, riempire le sue righe con numeri crescenti a partire da 1, e dividere il fattoriale del numero di celle per il prodotto di tutti i numeri così scritti:

$$\ydiagram{2,1} \rightarrow \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 1 \end{ytableau} \rightarrow \frac{3!}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 3$$

$$\ydiagram{1,1,1} \rightarrow \begin{ytableau} 1 \\ 1 \\ 1 \end{ytableau} \rightarrow \frac{3!}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 6$$

La Tabella 2 ripropone gli stessi diagrammi della Tabella 1, ma nella loro interpretazione come coefficienti.

Termini totali della composizione

Per associare a ciascun termine parziale della somma (diagramma nero) il corretto coefficiente (diagramma blu) è necessario identificare quanti diversi termini di f compaiono e con quale molteplicità. Per far ciò, si può seguire la regola seguente: partendo da un diagramma di termine parziale (nero) si "comprimono" i gruppi di righe uguali in una sola riga, scrivendovi nella prima casella il numero di righe "compresse". Quindi, si rimuovono tutte le colonne oltre la prima. Infine si "espande" ciascuna riga fino a che contenga un numero di celle pari a quello nella sua prima cella e si riordinano le righe. Si è così ottenuto il diagramma del coefficiente (diagramma blu) corrispondente a quello di partenza. Seguono alcuni esempi:

$$g_3 f_2 f_1^2 = \ydiagram{2,1,1} \rightarrow \begin{ytableau} 1 & \ \\ 2 \end{ytableau} \rightarrow \begin{ytableau} 1 \\ 2 \end{ytableau} \rightarrow \ydiagram{1,2} \rightarrow \ydiagram{2,1} = 3$$

$$g_3 f_3 f_2 f_1 = \ydiagram{3,2,1} \rightarrow \begin{ytableau} 1 & \ & \ \\ 1 & \ \\ 1 \end{ytableau} \rightarrow \begin{ytableau} 1 \\ 1 \\ 1 \end{ytableau} \rightarrow \ydiagram{1,1,1} = 6$$

$$g_4 f_2^2 f_1^2 = \ydiagram{2,2,1,1} \rightarrow \begin{ytableau} 2 & \ \\ 2 \end{ytableau} \rightarrow \begin{ytableau} 2 \\ 2 \end{ytableau} \rightarrow \ydiagram{2,2} = 6$$

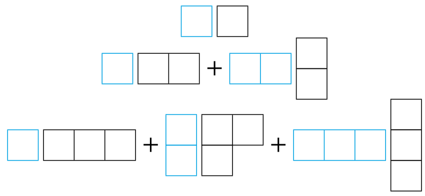
$$g_1 f_5 = \ydiagram{5} \rightarrow \begin{ytableau} 1 & \ & \ & \ & \ \end{ytableau} \rightarrow \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \rightarrow \ydiagram{1} = 1$$

$$g_3 f_1^3 = \ydiagram{1,1,1} \rightarrow \begin{ytableau} 3 \end{ytableau} \rightarrow \ydiagram{3} = 1$$

	$(\ldots)^1$	$(\ldots)^2$	$(\ldots)^3$	$(\ldots)^4$	$(\ldots)^5$
1	= 1	= 1	= 1	= 1	= 1
2		= 2	= 3	= 4 = 6	= 5 = 10
3			= 6	= 12	= 20 = 30
4				= 24	= 60
5					= 120

Tabella 2: Diagrammi di Young associati ai coefficienti. Procedendo da sinistra a destra aumenta la potenza che genera il termine (numero di celle). Procedendo dall'alto verso il basso aumenta il numero di simboli presenti nel termine (numero di righe).

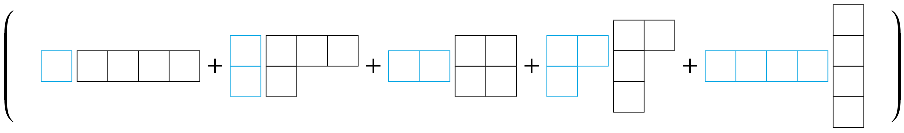
Si è quindi compreso come scrivere il generico termine in x^n risultate dalla composizione di f e g: basterà sommare tutti i termini parziali relativi ai diagrammi di Young (neri) con n celle, ciascuno moltiplicato per il coefficiente relativo al diagramma di Young blu ad esso associato. Omettendo la dipendenza da x, che si semplifica, si ottengono le relazioni tra le h_n, le g_i e le f_j:



$$\begin{aligned} h_1 &= 1g_1f_1 \\ h_2 &= 1g_1f_2 + 1g_2f_1^2 \\ h_3 &= 1g_1f_3 + 2g_2f_1f_2 + 1g_3f_1^3 \end{aligned}$$

Fino a questo punto i coefficienti hanno seguito il triangolo di Tartaglia (coefficienti binomiali). Il termine di quarto grado mostra come ciò non sia vero in generale.

$$h_4$$



$$1g_1f_4 + 2g_2f_1f_3 + 1g_2f_2^2 + 3g_3f_1^2f_2 + 1g_4f_1^4$$

Le relazioni seguenti possono essere derivate tutte allo stesso modo. Un calcolatore può essere programmato in modo da automatizzare la ricerca dei diagrammi di Young e le successive operazioni su di essi.

Inversione di una serie

Come già citato, la serie inversa (composizionale) g di una serie f è quella per la quale:

$$g(f(x)) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j x^j \right)^i = x$$

Tale condizione equivale a porre, nelle relazioni per la composizione di serie:

$$\begin{cases} h_1 = 1 \\ h_i = 0 \quad \forall i > 1 \end{cases}$$

Tramite sostituzione, si determinano immediatamente le g_i:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{f_1} \\ g_2 &= -\frac{f_2}{f_1^3} \\ g_3 &= \frac{2f_2^2}{f_1^5} - \frac{f_3}{f_1^4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ancora una volta, si può impiegare un programma per il calcolo simbolico per ottenere le relazioni per i gradi superiori. La presenza di f_1 al denominatore di tutte le espressioni fornisce inoltre un criterio di validità delle relazioni: esse lo sono soltanto se $f_1 \neq 0$. Si è inoltre preso fin dal principio $f_0 = 0$ poiché altrimenti la sommatoria in i darebbe origine a una somma infinita di termini non infinitesimi.

Un esempio: tangente e arcotangente

L'espansione in serie di Taylor centrata in 0 dell'arcotangente ha una forma molto semplice:

$$\mathrm{argtg}(x) = \sum_{n \text{ dispari}} (-)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n}$$

I suoi coefficienti (f_1, f_2, , f_3, ...) sono infatti:

$$(+1,\ 0,\ -1/3,\ 0,\ +1/5,\ 0,\ -1/7,\ 0,\ +1/9,\ \dots)$$

Cerchiamo i primi termini dello sviluppo della tangente invertendo quello dell'arcotangente. Dalle formule precedenti:

$$\begin{aligned}
g_1 &= & \frac{1}{f_1} &= 1 \\
g_2 &= & -\frac{f_2}{f_1^3} &= 0 \\
g_3 &= & \frac{2f_2^2}{f_1^5} - \frac{f_3}{f_1^4} &= \frac{1}{3} \\
g_4 &= & -\frac{1}{f_1^4}\left(2g_2 f_3 f_1 + 3g_3 f_2 f_1^2 + g_2 f_2^2 + g_1 f_4\right) &= 0 \\
g_5 &= & -\frac{1}{f_1^5}\left(2g_2 f_4 f_1 + 2g_2 f_3 f_2 + 4g_4 f_1^3 f_2 + 3g_3 f_1^2 f_3 + 3g_3 f_1 f_2^2 + g_1 f_5\right) &= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Per controllo, riportiamo i primi coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor della tangente:

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

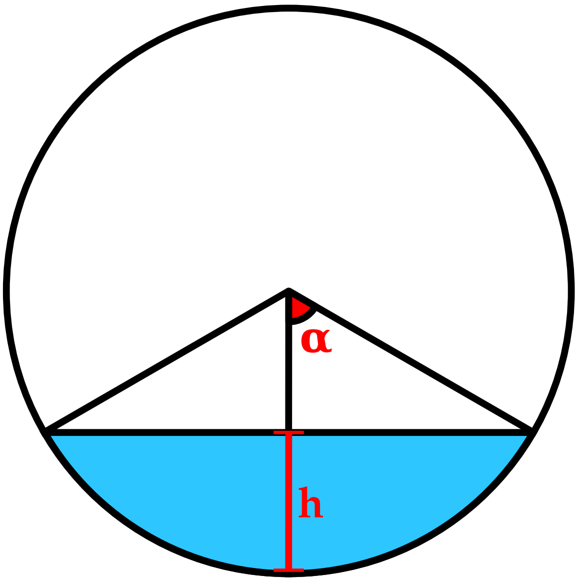
$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\,\mathrm{tg}(x)}{dx}\right|_{x=0} &= \frac{1}{\cos^2(0)} &&= 1 \\
\frac{1}{2}\left.\frac{d^2\,\mathrm{tg}(x)}{dx^2}\right|_{x=0} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin(0)}{\cos^3(0)} &&= 0 \\
\frac{1}{6}\left.\frac{d^3\,\mathrm{tg}(x)}{dx^3}\right|_{x=0} &= \frac{1}{6}\cdot\frac{2\cos^4(0) - 6\sin^2(0)\cos^2(0)}{\cos^6(0)} &&= \frac{1}{3} \\
\frac{1}{24}\left.\frac{d^4\,\mathrm{tg}(x)}{dx^4}\right|_{x=0} &= \cdots &&= 0 \\
\frac{1}{120}\left.\frac{d^5\,\mathrm{tg}(x)}{dx^5}\right|_{x=0} &= \cdots &&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Applicazione

Un tizio va a un festino di laurea di un suo compagno di corso. Mentre viaggia in macchina gli viene rivolto il seguente problema:

> *Ho un certo volume di liquido e lo verso in un silos cilindrico il cui asse è parallelo al terreno. Mi servirebbe una formula (approssimata) per l'altezza cui giunge il liquido nel silos, senza dover ricorrere a una soluzione di tipo iterativo.*

Si può trovare l'area A del segmento circolare bagnato dal liquido dividendo il volume V per la lunghezza del silos L. Per comodità, da qui in avanti tutte le misure lineari sono riferite al raggio interno del silos R: per ottenere misure fisiche nei risultati finali, basterà moltiplicare per R le lunghezze e per R^2 le aree.



Cerchiamo l'area bagnata (in azzurro) in funzione dell'altezza h o dell'angolo α. Notiamo inanzitutto che:

$$h = 1 - \cos(\alpha) \tag{1}$$

L'area del settore circolare formato dai due raggi e dall'arco di circonferenza bagnato è chiaramente pari a α. Inoltre, l'area del triangolo isoscele formato dai raggi e dalla corda che giace sulla superficie del liquido è $\sin(\alpha)\cos(\alpha)$. L'area del segmento circolare sarà pari a:

$$A = \alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \tag{2}$$

Riformuliamo la (2) in termini della variabile $\beta = 2\alpha$, in modo da semplificare la dipendenza:

$$A = \frac{1}{2}\Big[\beta - \sin(\beta)\Big] \tag{3}$$

L'equazione (3) è trascendente e non è invertibile in termini algebrici in un'espressione finita. È tuttavia possibile considerare il seno come una serie di potenze e provare a invertire la relazione utilizzando i metodi appena esposti, per ottenere una serie di potenze che definisca l'inversa. In realtà ci si rende subito conto che ciò non è possibile, infatti:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \sin(x) && (4)\\ &= x - \sum_{n=0}^{+\infty} (-)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} && (5)\\ &= x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right) && (6)\\ &= \frac{x^3}{6} + \dots && (7) \end{aligned}$$

L'equazione (7) mostra che il termine f_1 è nullo! Non è possibile invertire la serie attorno a 0 e trovare ivi una serie inversa. Se però viene effettuato uno sviluppo attorno ad un punto diverso da 0, o se equivalentemente si esegue un altro cambio di variabile, la serie diventa invertibile. Scegliamo come punto di sviluppo $x = \pi$, ossia riscriviamo la (3) in funzione di $\gamma = \beta - \pi$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\Big[\beta - \sin(\beta)\Big] && (8)\\ &= \frac{1}{2}\Big[\pi + \gamma - \sin(\pi + \gamma)\Big] && (9)\\ &= \frac{1}{2}\Big[\pi + \gamma + \sin(\gamma)\Big] && (10) \end{aligned}$$

Definendo $K = 2A - \pi$, che è invertibile in quanto lineare, si trova:

$$K = \gamma + \sin(\gamma) \tag{11}$$

L'equazione (11) definisce una relazione che, come la (3), è trascendente. Tuttavia questa volta è possibile invertire la serie, in quanto $f_1 \neq 0$: infatti lo sviluppo della funzione attorno a $\gamma = 0$ è uguale a quello del seno, a meno del coefficiente del termine lineare che è maggiorato di 1:

$$f(x) = x + \sin(x) \tag{12}$$

$$(f_1, f_2, f_3, \dots) = (+2, 0, -1/6, \dots) \tag{13}$$

Utilizzando le relazioni di inversione si trovano i coefficienti della serie inversa:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2} & g_6 &= 0\\ g_2 &= 0 & g_7 &= \frac{41}{1290240}\\ g_3 &= \frac{1}{96} & g_8 &= 0\\ g_4 &= 0 & g_9 &= \frac{193}{92897280}\\ g_5 &= \frac{1}{1920} & g_{10} &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

I coefficienti pari sono chiaramente nulli, poiché la funzione $g(x)$, come la sua inversa $f(x)$, è dispari. Utilizzando un programma scritto appositamente e molta pazienza, è stato possibile calcolare i coefficienti g fino a g_{40}, che forniscono i primi venti termini non nulli dell'espansione di $g(x)$. Una volta ottenuta una buona approssimazione di questa, è possibile calcorare l'angolo α a partire dall'area bagnata A con:

$$\alpha(A) \simeq G(A) = \frac{1}{2}\Big[g(2 \cdot A - \pi) + \pi\Big] \tag{15}$$

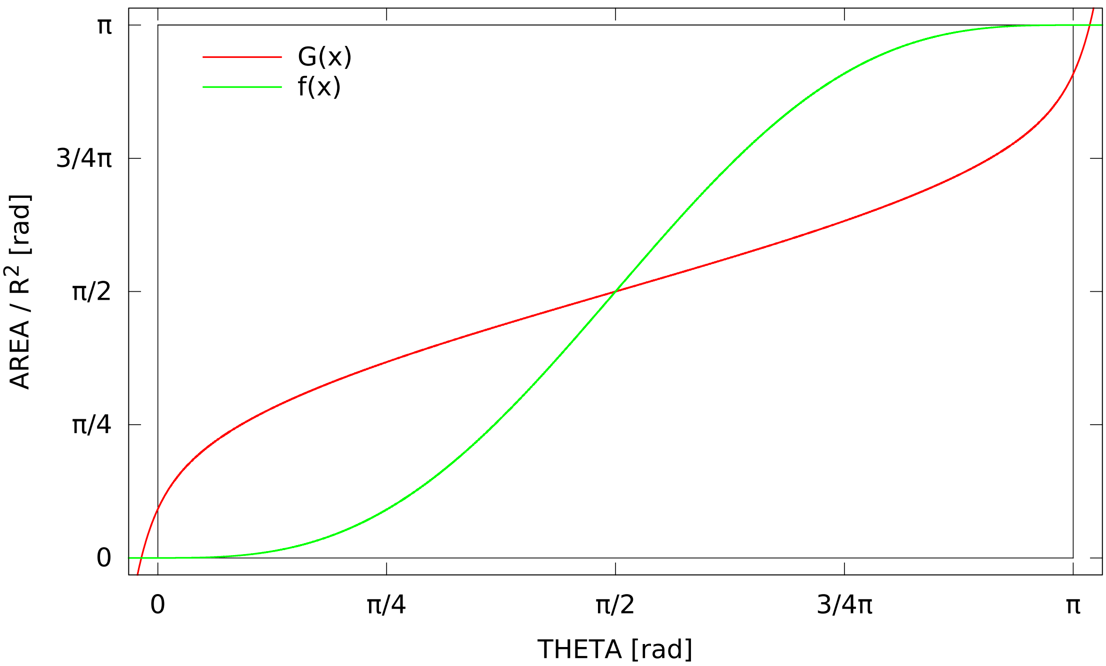


Figura 1: La funzione $F(x) = x - \sin(x)\cos(x)$ e la ridotta quarantesima della sua inversa $G(x) = \frac{1}{2}\Big[g(2x - \pi) + \pi\Big]$.

La Figura (1) mostra la funzione $A(\alpha)$ (chiamata $F(x)$) e la ridotta quarantesima di $\alpha(A)$, chiamata $G(x)$. La $G(x)$ si scosta sensibilmente dalla vera inversa solo nei pressi di $x = 0$ e $x = \pi$, poiché ivi l'inversa dovrebbe avere derivata divergente e le serie di potenze non sono adatte a rappresentare simili divergenze. Tuttavia, nella regione $x \simeq 0$ e $x \simeq \pi$ vale l'approssimazione dei piccoli angoli per $\sin(x)$ e ciò permette di calcolare facilmente una "inversa per i piccoli angoli" data da:

$$P(x) = \sqrt[3]{\frac{3x}{2}}$$

Il problema può essere quindi risolto praticamente in questo modo:

Per trovare l'angolo di apertura α sotteso dall'area bagnata ($A = {}^{\text{Area}}/_{R^2}$):

- Se l'area bagnata è minore del 2% dell'area totale, usare $P(A)$;
- Se l'area bagnata è maggiore del 98% dell'area totale, usare $\pi - P(\pi - A)$;
- Se l'area bagnata è compresa tra il 2% e il 98%, usare l'espansione in serie $G(A)$.

L'errore relativo e introdotto dall'approssimazione è massimo per valori dell'area bagnata prossimi al 2%, dove si ha $e \simeq 1\%$. Per tutti gli altri valori di A, l'errore è praticamente trascurabile. Una volta noto α, l'altezza H cui giunge il liquido può essere calcolata con $H = R[1 - \cos(\alpha)]$.

Coefficienti g_n per il problema del silos

$$g(x + \sin(x)) = x$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \, x^n$$

I coefficienti pari sono tutti nulli, poiché g(x) è dispari. I primi venti termini non nulli sono dati da questi coefficienti:

$$
\begin{array}{lcl}
g_1 & = & 1 \;/\; 2 \\
g_3 & = & 1 \;/\; 96 \\
g_5 & = & 1 \;/\; 1920 \\
g_7 & = & 43 \;/\; 1290240 \\
g_9 & = & 223 \;/\; 92897280 \\
g_{11} & = & 60623 \;/\; 326998425600 \\
g_{13} & = & 764783 \;/\; 51011754393600 \\
g_{15} & = & 107351407 \;/\; 85699747381248000 \\
g_{17} & = & 2499928867 \;/\; 23310331287699456000 \\
g_{19} & = & 596767688063 \;/\; 6377706640314571 1616000 \\
g_{21} & = & 22200786516383 \;/\; 2678636788932119887872 0000 \\
g_{23} & = & 64470807442488761 \;/\; 86744973772777770448846848 0000 \\
g_{25} & = & 3504534741776035061 \;/\; 5204698426366666226930810880 00000 \\
g_{27} & = & 359720740824266819897 3 \;/\; 584591727249503950608868678041 6000000 \\
g_{29} & = & 26891845762030980744185 3 \;/\; 4746884825265972078944013665697792000000 \\
g_{31} & = & 1853880324031849656932 74807 \;/\; 3531682309997883226734346167279157248 0000000 \\
g_{33} & = & 1824199136074272489183990 2347 \;/\; 3729456519357764687431469552646790053888 0000000 \\
g_{35} & = & 162624491429235350353488293947 13 \;/\; 3550442606428591982434759014111974413130137600000000 \\
g_{37} & = & 2037403289344551020141524968209753 \;/\; 47291895517628845206030990068074991828934328320 0000000 \\
g_{39} & = & 456184068058967283286619026966709090 9 \;/\; 1121385426514015177525406836494194206247690793123840 0000000
\end{array}
$$